Monoide

Funktionale Programmierung

Prof. Dr. Oliver Braun

Letzte Änderung: 09.10.2018 06:54

Abstraktion

- gleichartige Strukturen sollten abstrahiert werden
- Beispiel: Collections
- in Haskell geht das darüber hinaus
- **und**: viele Strukturen sind mathematisch fundiert und haben Gesetze

Eine Halbgruppe

- eine Halbgruppe ist ein Datentyp mit einer binären Operation
- Haskell Typklasse

```haskell
class Semigroup a where
  (<>) :: a → a → a
```

Ein Monoid

- ein **Monoid** ist eine
  - Datentyp
  - binäre, assoziative Operation
  - mit einer Identität
- Haskell Typklasse

```haskell
class Semigroup a ⇒ Monoid a where
  mempty :: a
  mappend :: a → a → a
  mappend = (<>)
  mconcat :: [a] → a
  mconcat = foldr mappend mempty
  {-# MINIMAL mempty #-}
```

Beispiel: Die Liste

- Operation: `(++)`, Identität: `[]`
- Nutzung z.B.

```
Prelude> [1, 2, 3] <> [4, 5, 6]
[1,2,3,4,5,6]
Prelude> mconcat [[1..3], [4..6]]
[1,2,3,4,5,6]
Prelude> foldr mappend mempty [[1..3], [4..6]]
[1,2,3,4,5,6]
```

- für Listen umständlicher, aber allgemein gültig

Vielleicht

- auch `Maybe a` ist Instanz von `Monoid`, wenn der Typ der darin "eingepackt" ist, ein `Monoid` ist
- Nutzung z.B.

```
Prelude> Just "Hallo" <> Just " "
                      <> Just "Welt"
Just "Hallo Welt"
Prelude> mconcat [ Just "Hallo", Just " "
                 , Just "Welt", Just "!"]
Just "Hallo Welt!"
Prelude> mconcat [ Just "Hallo", Nothing
                 , Just "Welt", Just "!"]
Just "HalloWelt!"
```

Auch für eigene Datentypen

- Studenten

```haskell
newtype Students = Students Int
```

- Semigroup-Instanz

```haskell
instance Semigroup Students where
  Students x <> Students y = Students $ x + y
```

- Monoid-Instanz

```haskell
instance Monoid Students where
  mempty = Students 0
```

```
*Prelude> (Students 12) <> (Students 23)
Students 35
```

Gruppeneinteilung (1/5)

- Studentengruppen

```haskell
data StudentGroups = StudentGroups
  { maxMembersPerGroup :: Int
  , groups :: [Int]
  }
```

Gruppeneinteilung (2/5)

- Studenten in Gruppen aufteilen

```
mkStudentGroups :: Int → Students → StudentGroups
mkStudentGroups size (Students i) =
let first = i `mod` size
    rest  = replicate (i `div` size) size
in  StudentGroups size $
      if first /= 0 then first : rest else rest
```

Gruppeneinteilung (3/5)

- Beispiel

```
*Prelude> group1 = mkStudentGroups 20 (Students 77)
*Prelude> group1
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 20
              , groups = [17,20,20,20]}
*Prelude> group2 = mkStudentGroups 10 (Students 26)
*Prelude> group2
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 10
              , groups = [6,10,10]}
```

Gruppeneinteilung (4/5)

- Beispiel für Semigroup- und Monoid-Instanz

```
instance Semigroup StudentGroups where
  (StudentGroups sizeX xs) <>
      (StudentGroups sizeY ys) =
    mkStudentGroups (max sizeX sizeY)
       (Students $ sum xs + sum ys)

instance Monoid StudentGroups where
  mempty = StudentGroups 0 []
```

Gruppeneinteilung (5/5)

- Beispiel

```
*Prelude> g1 <> g2
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 20
              , groups = [3,20,20,20,20,20]}

*Prelude> mempty <>
        StudentGroups 22 [12, 13, 17, 8, 12]
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 22
              , groups = [18,22,22]}
```

Keinen Monoid für Zahlen

- liegt im Wesentlichen daran, dass die binäre Operation + oder * sein könnte
- es gibt aber

```
*Prelude> import Data.Monoid
*Prelude Data.Monoid> :info Sum
newtype Sum a = Sum {getSum :: a}

*Prelude Data.Monoid> :info Product
newtype Product a = Product {getProduct :: a}
```

Monoid-Gesetze

- Linksidentität

```
mempty <> x == x
```

- Rechtsidentität

```
x <> mempty == x
```

- Assoziativität

```
x <> (y <> z) == (x <> y) <> z
```

- Tipp: Gesetze von QuickCheck testen lassen

Monoid-Instanz, aber kein Monoid! (1/2)

- zwar in der Typklasse **Monoid**, aber kein Monoid

```haskell
instance Monoid StudentGroups where
  mempty = StudentGroups 1 []
  (StudentGroups sizeX xs) `mappend`
      (StudentGroups sizeY ys) =
    mkStudentGroup sizeX
                   (Students (sum xs + sum ys))
```

- es wird immer die Gruppengröße des ersten Operanden genommen

Monoid-Instanz, aber kein Monoid! (2/2)

```
*Prelude> g3
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 12
              , groups = [7,12]}

*Prelude> g3 <> mempty
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 12
              , groups = [7,12]}

*Prelude> mempty <> g3
StudentGroups { maxMembersPerGroup = 1
              , groups = [0,1,1,1,1,1,1,1,1,1
                         ,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]}
```

keine Linksidentität