Treaps

(Algorithmen und Datenstrukturen I)

Prof. Dr. Oliver Braun

Letzte Änderung: 18.03.2018 18:16

Idee

- fügt man N Schlüssel der Reihe in einen zunächst leeren Suchbaum ein, kann ein degenerierter Suchbaum entstehen
- unter den $N!$ möglichen Anordnungen von N Schlüsseln tritt das nicht allzu häufig auf
- daher sind die Erwartungswerte für einen *zufällig* erzeugten Binärbaum mit N Schlüsseln nur von der Größenordnung $O(logN)$

Treaps

- geg. Menge S von Objekten mit der Eigenschaft, jedes $x \in S$ hat zwei Komponenten
  - Schlüsselkomponente $x.key$ und
  - Prioritätskomponente $x.priority$
- ein **Treap** ist
  - ein binärer Suchbaum für die Schlüsselkomponente
  - ein Min-Heap für die Prioritätskomponente

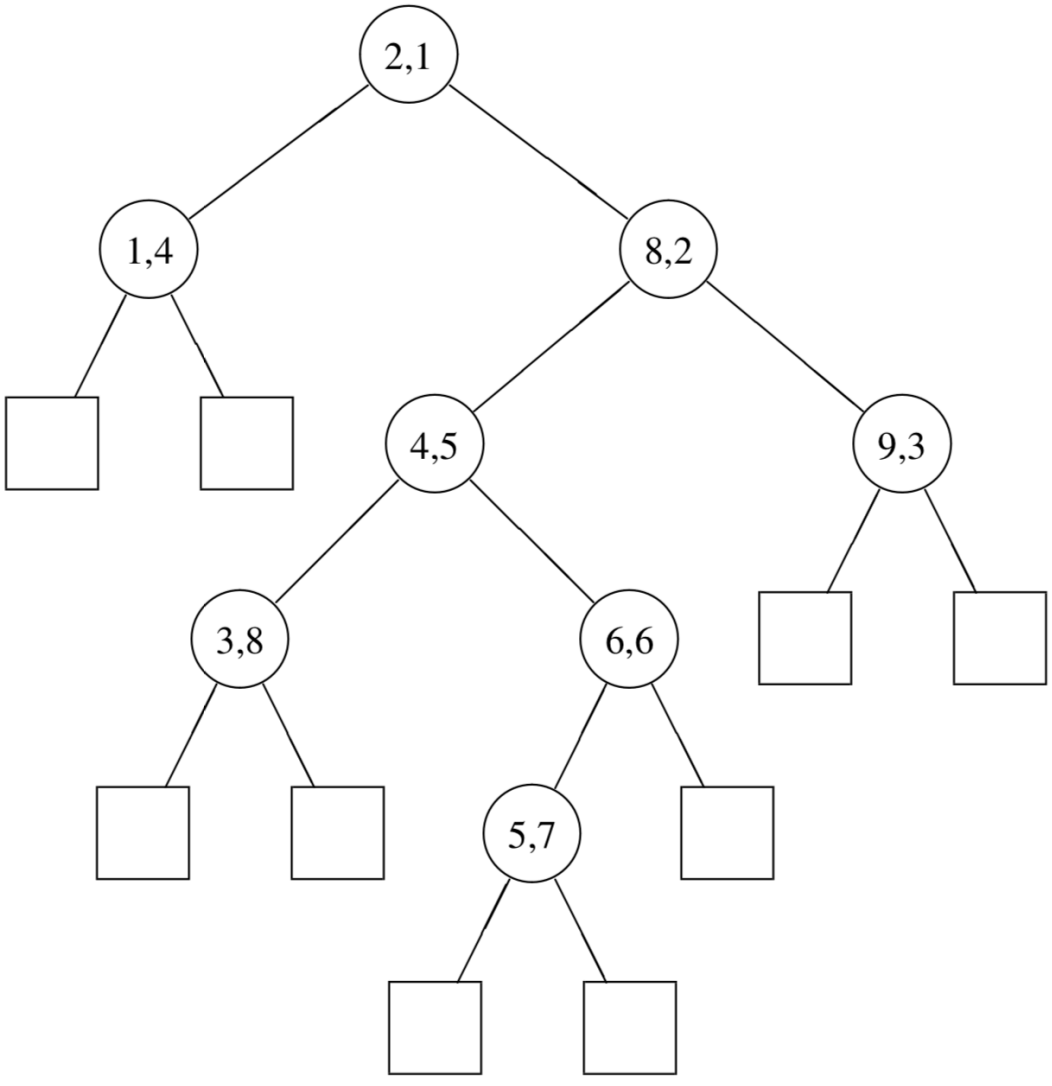
Bedingungen

für jeden Knoten p, der das Element x speichert, gelten die beiden folgenden Bedingungen:

Suchbaumbedingung: für jedes Element y im linken Teilbaum von p gilt $y.key \leq x.key$ und für jedes Elemet y im rechten Teilbaum von p gilt $x.key \leq y.key$

Heapbedingung: für jedes in einem Nachfolger von p gespeicherte Element z gilt $x.priority \leq z.priority$

Beispiel



Suchen und Einfügen

- Feststellung: für jede Menge
- Suche wie im Suchbaum
- Einfügen zunächst wie im Suchbaum
- passt die Heapbedingung nicht für das neu eingefügte Element
  - durch Rotation nach links oder rechts solange nach oben bewegen, bis die Heapbedingung wieder gilt

Entfernen

- durch Rotationen das zu entfernende Element x solange abwärts bewegen,
- bis beide Nachfolger Blätter sind
- Entscheidung wie zu rotieren ist, hängt von den beiden Nachfolgern ab
  - das Element mit der kleineren Priorität muss nach oben wandern

Treaps mit zufälligen Prioritäten

- ein **randomisierter Suchbaum** für eine Menge S von Schlüsseln ist ein Treap
  - mit Schlüsseln aus S und
  - unabhängig und gleich verteilt zufällig gewählten Prioritäten
- keine zwei Schlüssel sollen gleiche Priorität erhalten
- geordnet nach wachsenden Prioritäten soll jede Permutation der Schlüssel gleich wahrscheinlich sein
- Prioritäten, z.B. erzeugt durch Zufallszahlengenerator, sollten vor dem Benutzer verborgen bleiben
  - sonst könnte er durch "einseitige" Wahl von Schlüsseln (und Prioritäten) doch degenerierte Bäume erzeugen

Literaturhinweis

Die Graphen in diesem Kapitel sind aus dem Buch *Algorithmen und Datenstrukturen* von Ottmann & Widmayer.