

# Gewichtsbalancierte Bäume

(Algorithmen und Datenstrukturen I)

Prof. Dr. Oliver Braun

Letzte Änderung: 18.03.2018 18:16

- ▶ nicht Höhe sondern Anzahl der Knoten bzw. Blätter entscheidend
- ▶ d.h. Anzahl der Knoten bzw. Blätter im linken und rechten Teilbaum eines jeden Knotens dürfen nicht zu unterschiedlich sein
- ▶ wir wissen bereits: Anzahl Blätter = Anzahl binäre innere Knoten + 1 in einem Binärbaum

## Definition (1/2)

- ▶ für Knoten  $p$  der Wurzel des Teilbaumes  $T_p$  ist, bezeichnet  $W(p)$  bzw.  $W(T_p)$  die Anzahl der Blätter des Teilbaumes  $T_p$
- ▶  $W(p)$  und  $W(T_p)$  nennt man **Gewicht** von  $p$  bzw.  $T_p$
- ▶ ist  $T$  ein Baum mit  $W(T)$  Blättern, dessen linker Teilbaum  $W(T_l)$  Blätter hat, so heisst

$$\rho(T) = \frac{W(T_l)}{W(T)}$$

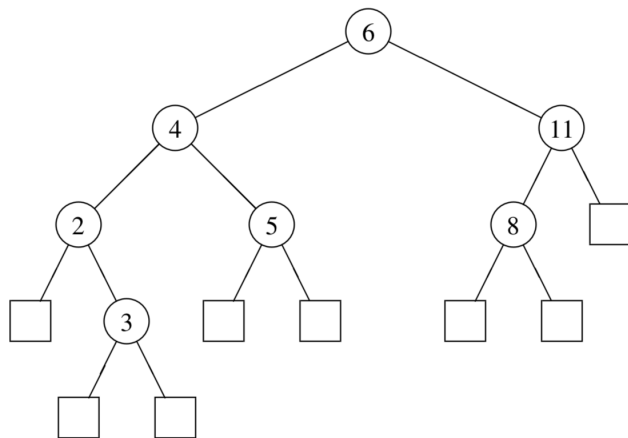
**Wurzelbalance** von  $T$

## Definition (2/2)

- ▶ ist ferner  $\alpha$  eine Zahl mit  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$
- ▶ so heisst ein binärer Suchbaum **von beschränkter Balance  $\alpha$**  oder **gewichtsbalanciert mit Balance  $\alpha$** , wenn für jeden Teilbaum  $T'$  von  $T$  gilt:

$$\alpha \leq \rho(T') \leq (1 - \alpha)$$

# Beispiel



► z.B. für  $\alpha = \frac{1}{4}$  gewichtsbalanciert

## Parameter $\alpha$

- ▶ über  $\alpha$  lässt sich die Güte der Ausgeglichenheit steuern
- ▶ je näher  $\alpha$  bei 0 liegt, umso weniger restriktiv
- ▶ je näher an  $\frac{1}{2}$ , umso besser ausgeglichen müssen die  $\text{BB}[\alpha]$ -Bäume sein
- ▶ zu nah an  $\frac{1}{2}$  ist aber nicht möglich
  - ▶ beispielsweise existiert kein Baum mit zwei inneren Knoten, der  $\text{BB}[\frac{1}{2}]$ -Baum ist
- ▶ sinnvoll daher  $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$

- ▶ man kann zeigen, dass gewichtsbalancierte Bäume eine Höhe haben, die logarithmisch von der Anzahl der Knoten abhängt (siehe Ottman & Widmayer, S. 312ff)
- ▶ damit und der Tatsache, dass ein gewichtsbalancierter Baum ein Suchbaum ist, ergibt sich unmittelbar, dass sich die Suche in stets  $O(\log N)$  Schritten ausführen lässt

# Einfügen und Entfernen

- ▶ beides zunächst wie in Suchbaum
- ▶ resultierender Baum ist evtl. nicht mehr gewichtsbalanciert aus  $BB[\alpha]$
- ▶ anschließend überprüfen ob Wurzelbalance noch in den Grenzen ist
- ▶ wenn nicht: Rotation oder Doppelrotation



Die Graphen in diesem Kapitel sind aus dem Buch *Algorithmen und Datenstrukturen* von Ottmann & Widmayer.