Algorithmen und Datenstrukturen I

AVL-Bäume

Prof. Dr. Oliver Braun

Fakultät für Informatik und Mathematik
Hochschule München

Letzte Änderung: 18.03.2018 18:16

Inhaltsverzeichnis

Balancierte Bäume

- in einem zufällig erzeugten Binärbaum haben die Algorithmen *Suchen*, *Einfügen* und *Löschen*
  - im Mittel eine Laufzeit von $\mathcal{O}(log_2 N)$
  - aber im schlechtesten Fall eine lineare Laufzeit
    * entarteter Baum
- das Degenerieren des Baumes soll durch eine zusätzliche Bedingung an die Struktur der Bäume verhindert werden

AVL-Bäume

- ein binärer Suchbaum ist **AVL-ausgeglichen** oder **höhenbalanciert**
  - kurz: **ein AVL-Baum**
- wenn für jeden Knoten p des Baumes gilt:
  - die Höhe des linken Teilbaumes unterscheidet sich höchstens um 1 von der Höhe des rechten Teilbaumes

Suchen

- exakt wie in natürlichem Baum

Einfügen

- zunächst wie in natürlichem Baum
  - ersetze Blatt durch inneren Knoten mit Schlüssel
- aber: der entstehende Suchbaum ist eventuell nicht mehr AVL-ausgeglichen
- dazu läuft man den Pfad von der Einfügestelle zur Wurzel entlang
  - und überprüft für jeden Knoten ob die Höhendifferenz höchstens 1 ist
- ist das nicht der Fall kann man eine **Rotation** oder **Doppelrotation** ausführen
  - erhält Sortierung der Schlüssel
  - aber verändert die Höhendifferenz

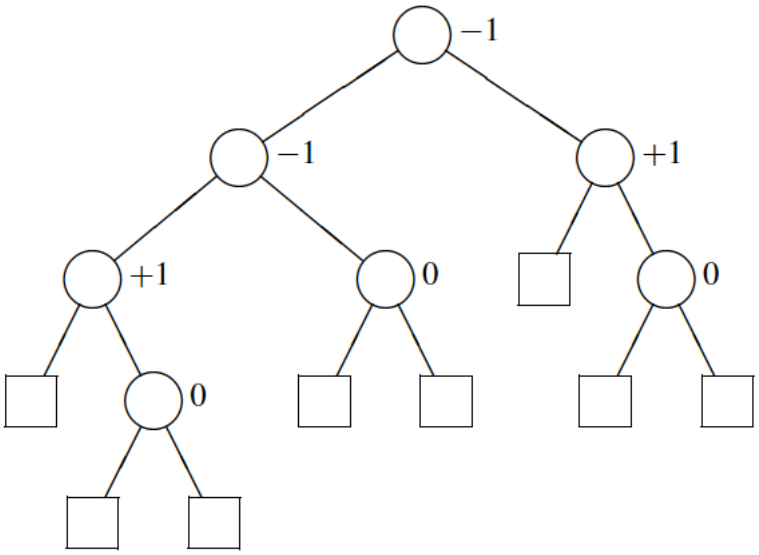
Balancefaktor

- zur Prüfung der Höhenbedingung reicht es den Balancefaktor zusätzlich in jedem inneren Knoten zu speichern
- es ist nicht notwendig die Höhe der Teilbäume zu speichern
- der **Balancefaktor** $bal(p)$ ist definiert durch

  $bal(p) = Höhe\ des\ rechten\ Teilbaumes\ von\ p$
  $- Höhe\ des\ linken\ Teilbaumes\ von\ p.$
- damit gilt für jeden inneren Knoten p:

$$bal(p) \in \{-1, 0, 1\}$$

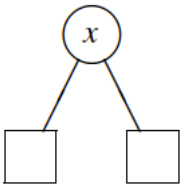
Beispiel



Quelle: Ottmann & Widmayer: Algorithmen und Datenstrukturen I

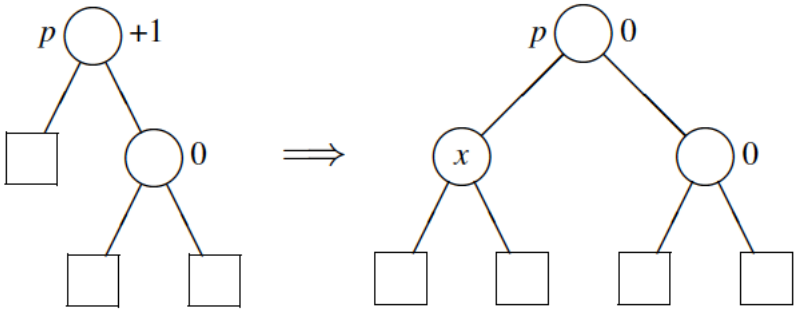
Einfügen in leeren Baum

- Einfügen des Schlüssel x in den leeren Baum

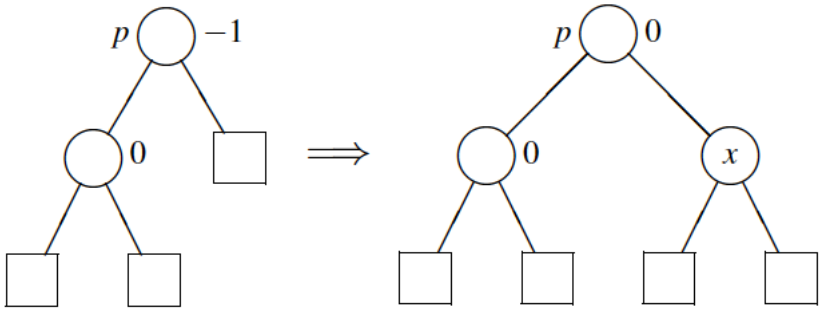


Einfügen mit Vorgänger

- sei p der Vorgänger des Blattes an dem die Suche endet
- drei Fälle sind möglich
- Fall 1: $bal(p) = +1$



- Fall 2: $bal(p) = -1$



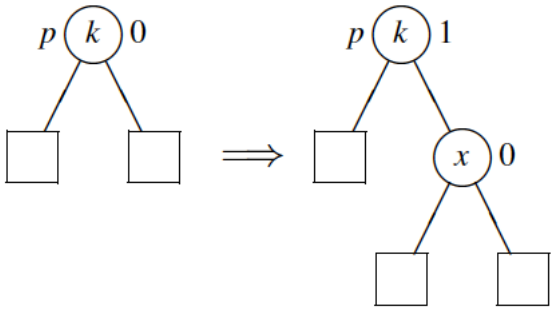
- Fall 3: $bal(p) = 0$
  - nur in diesem Fall ändert sich die Höhe des Baumes mit der Wurzel p
  - p hat nach dem Einfügen einen Balancefaktor 1 oder -1

Die Prozedur $upin(p)$

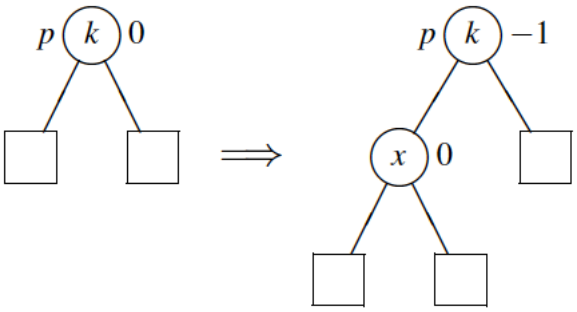
- da sich der Balancefaktor von p geändert hat, haben sich eventuell auch die Balancefaktoren der Knoten auf dem Pfad von p zur Wurzel geändert
  - aber nur diese
- dazu wird eine Prozedur $upin(p)$ definiert, die den Pfad zur Wurzel zurück läuft und die Balancefaktoren anpasst

$bal(p) = 0$

- Fall 3.1: $bal(p) = 0$ und einzufügender Schlüssel $x >$ Schlüssel k von p



- anschließend Aufruf $upin(p)$
- Fall 3.2: $bal(p) = 0$ und einzufügender Schlüssel $x <$ Schlüssel k von p



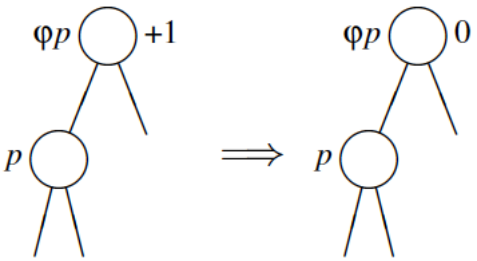
- anschließend Aufruf $upin(p)$

$upin(p)$

- wenn $upin(p)$ aufgerufen wird, ist $bal(p) \in \{-1, 1\}$ und die Höhe des Teilbaumes mit der Wurzel p ist um 1 gewachsen
- diese Invariante muss vor jedem rekursiven Aufruf von $upin$ gelten
- $upin(p)$ bricht ab, wenn p die Wurzel ist

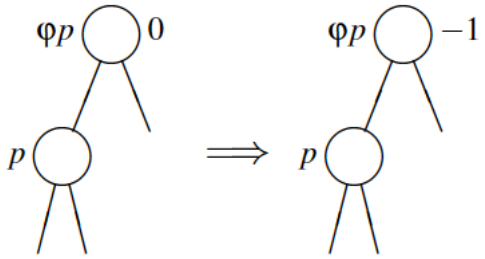
Fall 1: p ist linker Nachfolger von φp

- Fall 1.1: $bal(\varphi p) = 1$



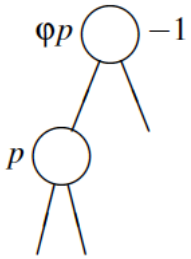
  - fertig

- Fall 1.2: $bal(\varphi p) = 0$

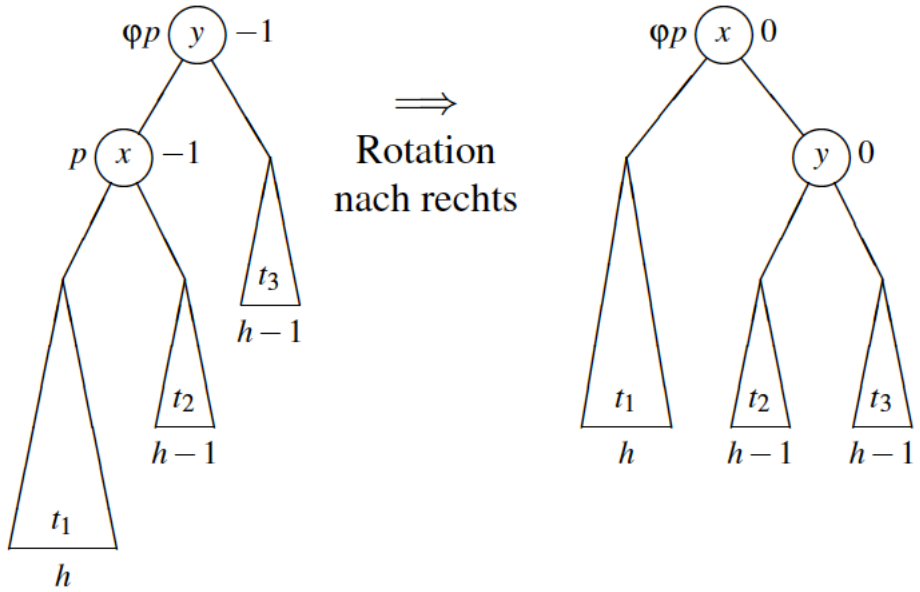


  - $upin(\varphi p)$

- Fall 1.3: $bal(\varphi p) = -1$

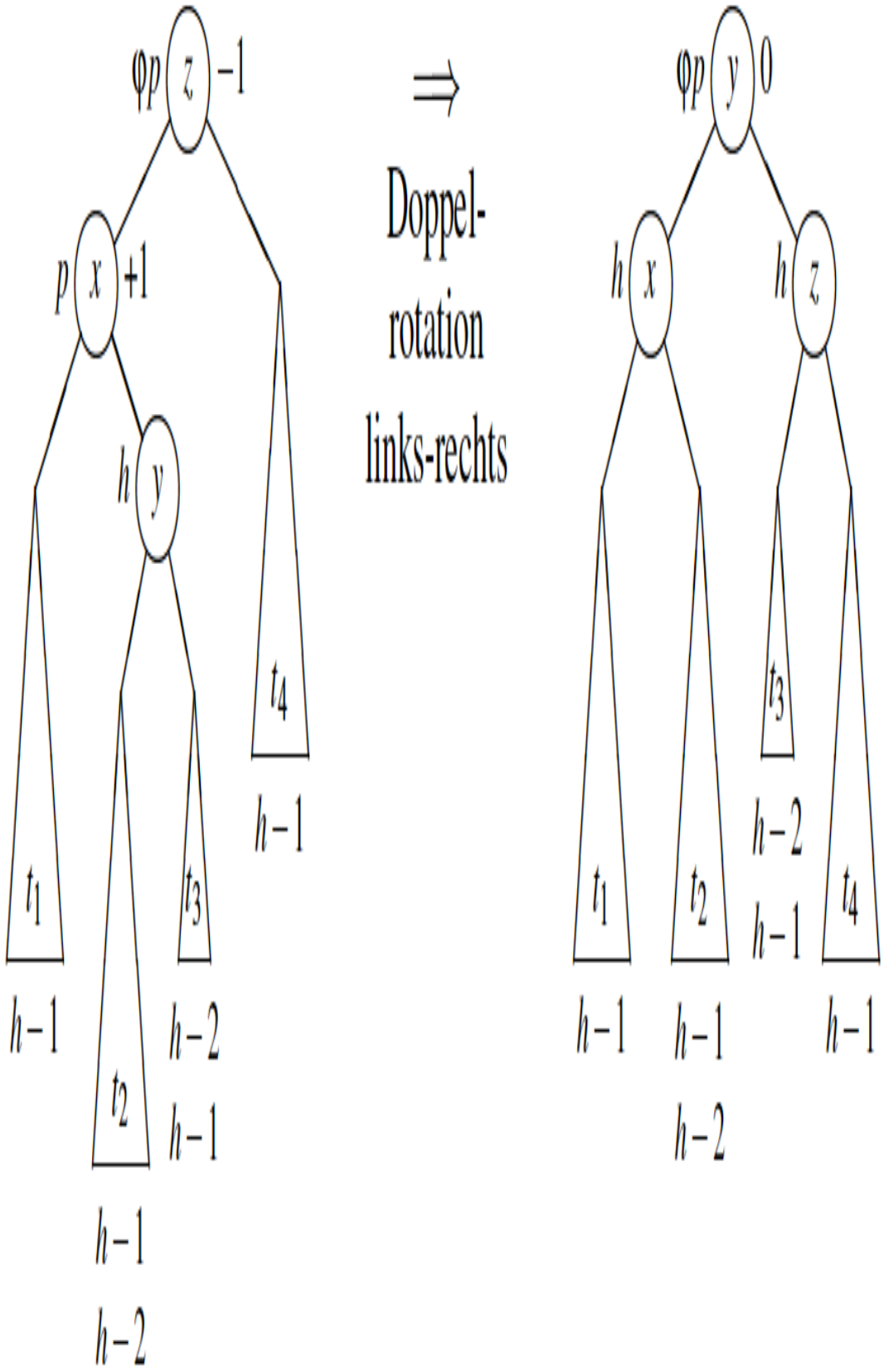


- der linke Teilbaum von φp war schon höher als der rechte Teilbaum
- da der Baum von p um 1 gewachsen ist, ist die AVL-Ausgeglichenheit nun bei φp verletzt
- Fall 1.3.1 $bal(p) = 1$, anschließend fertig



- nach Voraussetzung:

  - Baum von p um 1 gewachsen
  - linker Teilbaum von p um 1 höher als rechter
- nach Rotation ist Teilbaum mit Wurzel φp nicht gewachsen
- Fall 1.3.2 $bal(p) = +1$, anschließend fertig


φp
z
−1
p
x
+1
h
y
t1
t2
t3
t4
h−1
h−2
h−1
h−1
h−2
⇒
Doppel-
rotation
links-rechts
φp
y
0
h
x
h
z
t1
t2
t3
t4
h−1
h−1
h−2
h−2
h−1
h−1

- für t_2 und t_3 gilt:
  - entweder beide leer
  - oder einer Höhe $h-1$ und der andere Höhe $h-2$
  - können nicht die gleiche Höhe haben,
    * denn rechter Teilbaum von p ist um 1 gewachsen
    * und der rechte Teilbaum ist um 1 höher als der linke

Fall 2: p ist rechter Nachfolger von φp

- analog zu Fall 1
- wenn nötig Rotation nach links
- oder Doppelrotation rechts links

Zusammenfassung Einfügen

- im schlimmsten Fall wird *upin* für alle Knoten auf dem Suchpfad bis zur Wurzel aufgerufen
- in jedem Fall wird aber nur eine Rotation oder Doppelrotation durchgeführt
- damit ist klar, dass Einfügen eines neuen Schlüssels in einen AVL-Bau mit N Schlüsseln in $\mathcal{O}(logN)$ Schritten ausführbar ist

Entfernen eines Schlüssels

- zunächst Suche des zu entfernenden Schlüssels
- nicht gefunden $\Rightarrow$ fertig
- sonst 3 Fälle
  1. beide Nachfolger Blätter
  2. ein Nachfolger innerer Knoten und einer Blatt
  3. beide Nachfolger innere Knoten

Fall 1: beide Nachfolger Blätter

- beide Nachfolger des Knotens mit dem zu entfernenden Schlüssel sind Blätter
- ersetzen des Knotens durch ein Blatt

- sei p der Vorgänger des neuen Blattes
- dann muss der andere Teilbaum q von p die Höhe 0, 1 oder 2 haben
- q hat Höhe 1: jetzt $bal(p) \in \{-1, 1\}$
- q hat Höhe 0: jetzt $bal(p) = 0$ und Höhe von p hat sich um 1 verringert
  - Aufruf einer Prozedur *upout* auf dem Suchpfad zur Wurzel
- q hat Höhe 2:
  - zuerst Rotation oder Doppelrotation um Baum mit Wurzel p wieder auszugleichen
  - wenn die neue Wurzel dieses Teilbaumes neuen Balancefaktor 0 hat, ist die Höhe um 1 gesunken
    - dann Aufruf von *upout*

Fall 2: ein Nachfolger innerer Knoten und einer Blatt

- wenn p nur einen inneren Knoten q und ein Blatt als Nachfolger hat
- müssen beide Nachfolger von q Blätter sein
- dann wird der Schlüssel von p durch den Schlüssel von q ersetzt und q durch ein Blatt
- da die Höhe des Teilbaumes mit Wurzel p von 2 auf 1 gesunken ist
  - Aufruf von *upout*

Fall 3: beide Nachfolger von p innere Knoten

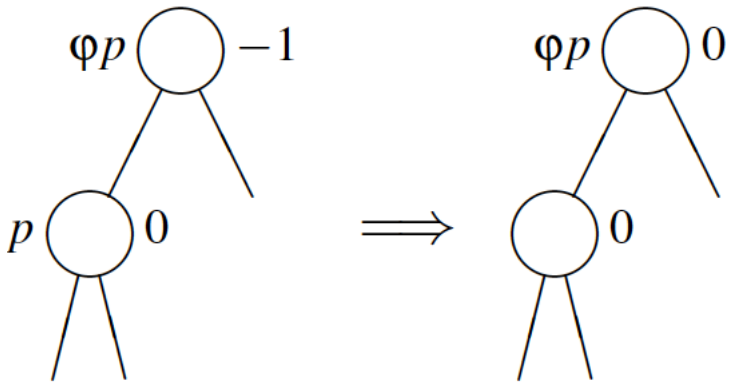
- wie bei natürlichen Suchbäumen
  - Ersetzen des Schlüssels von p durch den Schlüssel des symmetrischen Vorgängers oder Nachfolgers
  - und Entfernen des symmetrischen Vorgängers oder Nachfolgers
- d.h. es wird ein Knoten entfernt, der entsprechend Fall 1 oder Fall 2 zu behandeln ist

$upout(p)$

- wenn $upout(p)$ aufgerufen wird, gilt:
  - $bal(p) = 0$ und
  - die Höhe des Teilbaumes mit Wurzel p ist um 1 gesunken

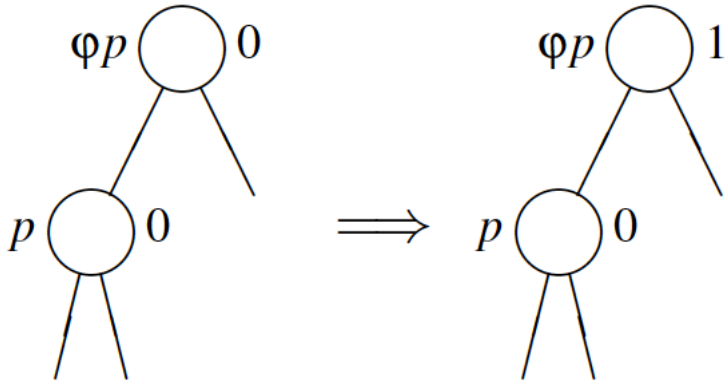
Fall 1: p ist linker Nachfolger von φp

- Fall 1.1: $bal(\varphi p) = -1$



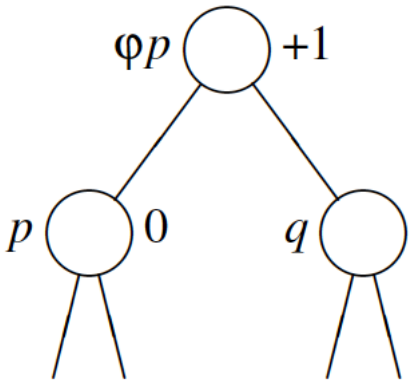
  - Aufruf von $upout(\varphi p)$

- Fall 1.2: $bal(\varphi p) = 0$



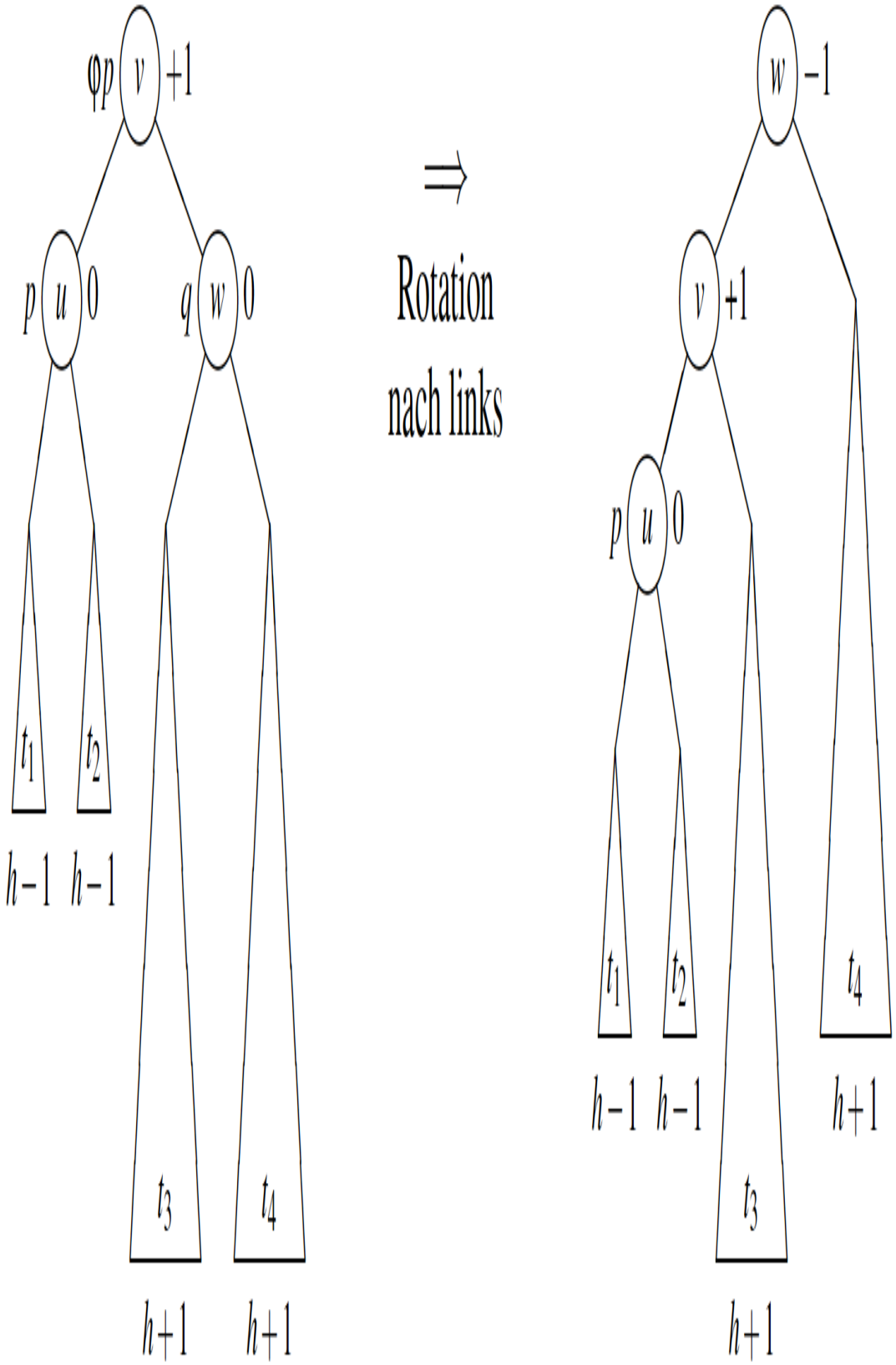
  - fertig

- Fall 1.3: $bal(\varphi p) = 1$



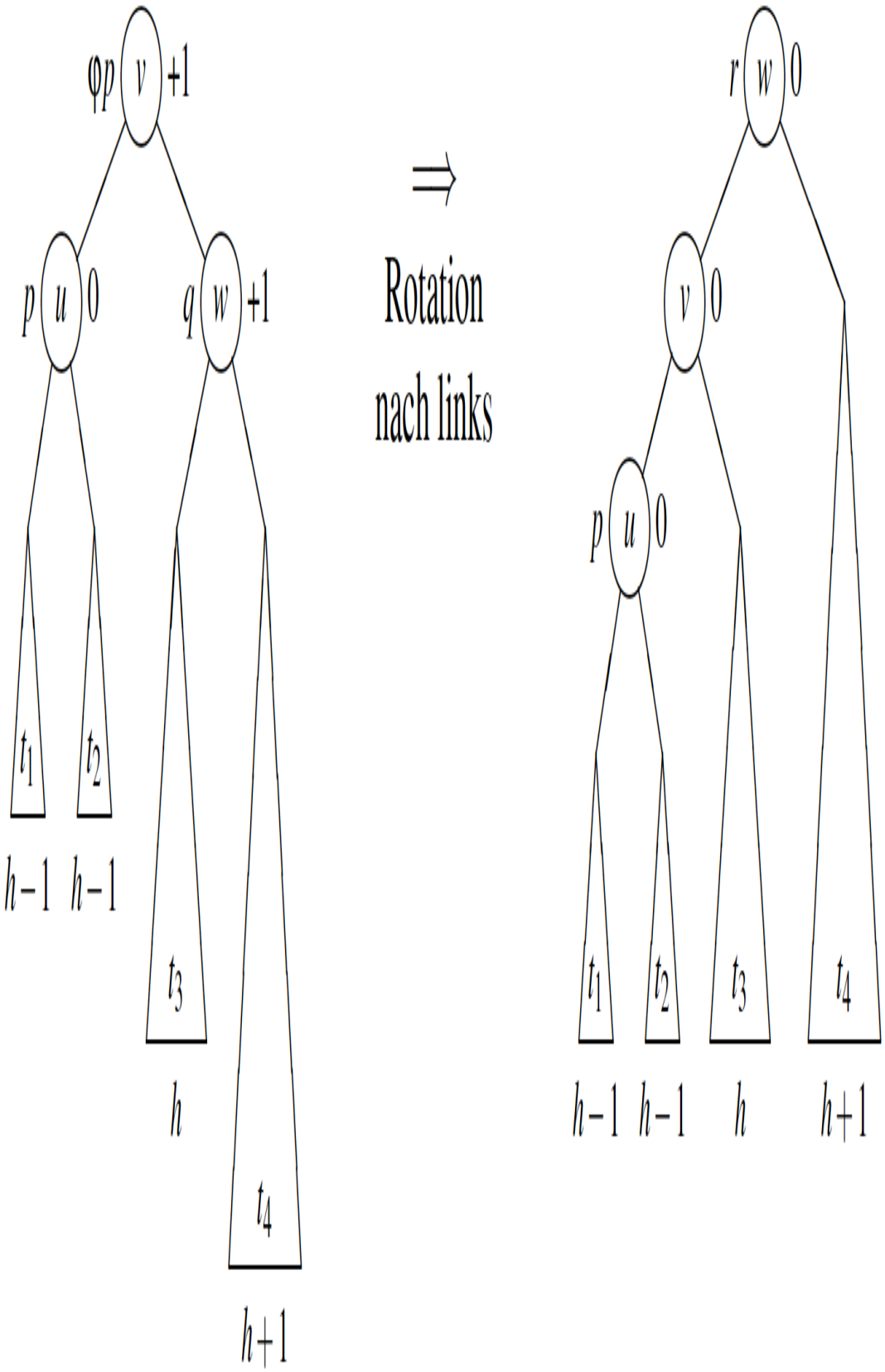
  - der rechte Teilbaum war also schon höher als der linke, der noch um 1 niedriger wurde

- Fall 1.3.1: $bal(q) = 0$


φp
v
+1
p
u
0
q
w
0
t1
t2
h-1
h-1
t3
t4
h+1
h+1
⇒
Rotation
nach links
w
-1
v
+1
p
u
0
t1
t2
t4
h-1
h-1
h+1
t3
h+1

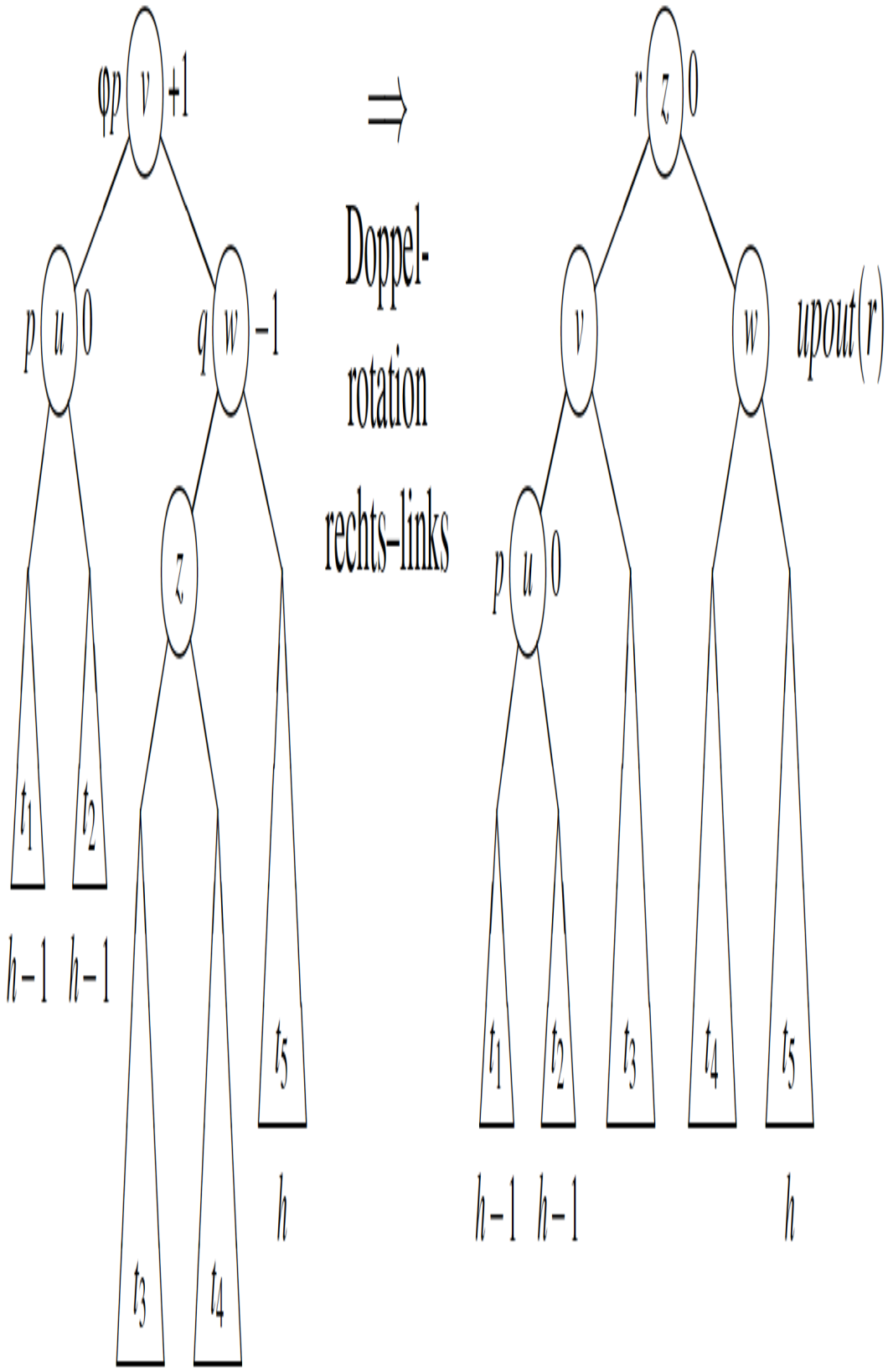
  - fertig

- Fall 1.3.2: $bal(q) = 1$


φp
v
+1
p
u
0
q
w
+1
t1
t2
h−1
h−1
t3
h
t4
h+1
⇒
Rotation
nach links
r
w
0
v
0
p
u
0
t1
t2
t3
t4
h−1
h−1
h
h+1

  - $upout(r)$

- Fall 1.3.3 $bal(q) = 1$


qp
v
+1
p
u
0
q
w
-1
z
t1
t2
h-1
h-1
t3
t4
t5
h
⇒
Doppel-
rotation
rechts-links
r
z
0
v
w
upout(r)
p
u
0
t1
t2
t3
t4
t5
h-1
h-1
h

- Teilbaum mit Wurzel q war bereits vor dem Entfernen um 1 höher als Teilbaum mit Wurzel p
- d.h. Teilbaum mit Wurzel q muss die Höhe $h + 2$ haben
- wegen $bal(q) = -1$ hat der linke Teilbaum von q die Höhe $h + 1$ und der rechte die Höhe h
- die Teilbäume von z haben entweder beide die Höhe h oder höchstens einer die Höhe $h - 1$
- die Höhe des Teilbaumes mit der Wurzel r hat um 1 abgenommen

Fall 2: p ist rechter Nachfolger von φp

- ist völlig symmetrisch zu Fall 1

Zusammenfassung Entfernen

- anders als *upin*, kann es sein, dass *upout* nach einer Rotation oder Doppelrotation erneut aufgerufen wird
- aber Aufwand für Rotation ist konstant und Höhe ist beschränkt
  - Entfernen eines Schlüssels in einem AVL-Baum mit N Schlüsseln in $\mathcal{O}(logN)$ Schritten ausführbar

Literaturhinweis

Die Graphen in diesem Kapitel sind aus dem Buch *Algorithmen und Datenstrukturen* von Ottmann & Widmayer.