

Algorithmen und Datenstrukturen II

3. Spanning Trees

Prof. Dr. Oliver Braun

Fakultät für Informatik und Mathematik
Hochschule München

Letzte Änderung: 18.04.2020 15:57

Inhaltsverzeichnis

Minimal spannende Bäume	1
Verfahren zur Lösung	2
Algorithmus-Gerüst	2
Auswahlverfahren für die Kanten	2
Definition Schnitt	3
Entscheidungsregeln	3
Algorithmus von Boruvka	3
Algorithmus von Kruskal	3
Algorithmus von Jarník, Prim, Dijkstra	4
Aufgabe	4

Minimal spannende Bäume

- ein **minimaler spannender Baum** (*minimal spanning tree, MST*)
 - eines Graphen G
 - ist ein spannender Baum von G von
 - minimaler Gesamtlänge unter allen spannenden Bäumen von G
- Ziel: aus einer Vielzahl von Kanten nur diese auszuwählen,
 - die die Knoten mit kürzester Gesamtlänge verbinden

- notwendige Voraussetzung
 - **zusammenhängender**, ungerichteter Graph

Verfahren zur Lösung

- **gieriges** (*greedy*) Verfahren
 - Entscheidungen, die den Rechenprozess der Lösung näher bringt
 - * auf Basis der bis dahin gesammelten Informationen
 - * werden nicht mehr revidiert
 - vergleichsweise effizient

Algorithmus-Gerüst

- berechne
 - zu zusammenhängenden, ungerichteten, bewerteten Graphen $G = (V, E)$
 - mit $c : E \rightarrow \mathbb{R}$
 - einen minimalen spannenden Baum $T' = (V, E')$ von G
- setze $E' = \emptyset$
- solange noch nicht fertig
 - wähle **geeignete** Kante und füge diese zu E' hinzu

Auswahlverfahren für die Kanten

- alle Kanten sind entweder *gewählt*, *verworfen* oder *unentschieden*
- zu Beginn alle Kanten unentschieden
- am Ende des Auswahlverfahrens bilden die gewählten einen minimalen spannenden Baum
- *Auswahlinvariante*
 - es gibt einen MST der alle gewählten und keine verworfenen Kanten enthält
- im Laufe der Jahre verschiedene effiziente Algorithmen vorgeschlagen

Definition Schnitt

- ein **Schnitt** in einem Graphen $G = (V, E)$
- ist eine Zerlegung von V in S und $\bar{S} = V - S$
- eine Kante **kreuzt** einen Schnitt, wenn sie mit einem Knoten aus S und einem Knoten aus \bar{S} inzident ist

Entscheidungsregeln

die folgenden Regeln entscheiden darüber ob eine unentschiedene Kante gewählt oder verworfen wird

Regel 1 (Wähle eine Kante) Wähle einen Schnitt, den keine gewählte Kante kreuzt. Wähle eine kürzeste unter den unentschiedenen Kanten, die den Schnitt kreuzen.

Regel 2 (Verwirf eine Kante) Wähle einen einfachen Zyklus, der keine verworfenen Kanten enthält. Verwirf eine längste unter den unentschiedenen Kanten im Zyklus.

die verschiedenen Algorithmen unterscheiden sich zum einen

- in der Reihenfolge in der die beiden Regeln angewandt werden

und zum anderen

- in der Art, wie ein Schnitt oder ein Zyklus gewählt werden

Algorithmus von Boruvka

- ältester Algorithmus
- für $G = (V, E)$ ist am Anfang jeder einzelne Knoten ein gewählter Baum
- in einem *Auswahlschritt* wird für jeden gewählten Baum eine kürzeste Kante zu einem anderen Baum gewählt
 - gibt es zu einem Baum mehr als eine kürzeste Kante, wird diejenige gewählt, die mit einem Knoten kleinster Nummer indiziert
 - dadurch wird vermieden, dass durch ungeschickte Wahl ein Zyklus entsteht

Algorithmus von Kruskal

- für $G = (V, E)$ ist am Anfang jeder einzelne Knoten ein gewählter Baum
- dann wird für jede Kante $e \in E$ in *aufsteigender Kantenlänge* folgender *Auswahlschritt* angewandt:
 - falls e beide Endknoten im selben gewählten Baum hat, *verwirf* e
 - sonst, *wähle* e

Algorithmus von Jarník, Prim, Dijkstra

- ähnlich Dijkstras kürzeste Wege Algorithmus
- zu jedem Zeitpunkt bilden die gewählten Kanten *einen* gewählten Baum
- wir beginnen mit einem beliebigen Anfangsknoten $s \in V$ und führen folgenden Auswahlsschritt $(|V| - 1)$ -mal aus:
 - wähle eine Kante mit minimaler Länge zu der genau ein Endknoten zum gewählten Baum gehört

Aufgabe

Berechnen Sie den MST nach den drei verschiedenen Algorithmen:

