

Bruder-Bäume


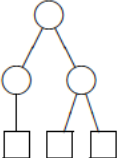
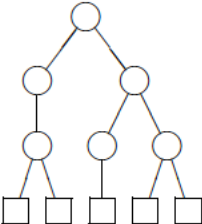
Algorithmen und Datenstrukturen I

Prof. Dr. Oliver Braun

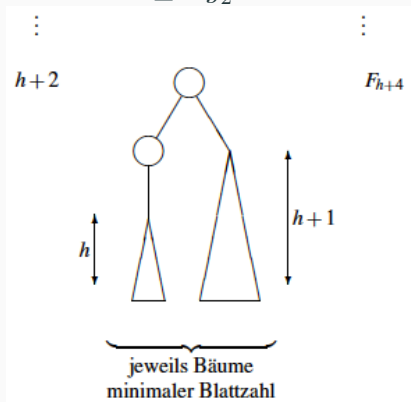
Letzte Änderung: 01.12.2019 19:06

- ein binärer Baum heißt ein **Bruder-Baum**, wenn
 - jeder innere Knoten ein oder zwei Nachfolger hat,
 - jeder unäre Knoten einen binären Bruder hat und
 - alle Blätter dieselbe Tiefe haben
- **Brüder** sind Knoten die den gleichen Vorgänger haben
- aus der Definition folgt direkt
 - ist ein Knoten p einziger Nachfolger seines Vorgängers, so ist
 - p ein Blatt oder
 - p ein binärer Knoten
 - von zwei Nachfolgern eines binären Knotens kann höchstens einer unär sein
- Anzahl der Blätter ist stets um 1 größer als die Anzahl der binären (inneren) Knoten

Höhe und Anzahl Blätter

Höhe	Bruder-Bäume mit minimaler Blattzahl	Blattzahl
1		2
2		3
3		5

- ein Bruderbaum mit Höhe h hat wenigstens F_{h+2} Blätter (F_i : i -te Fibonacci-Zahl)
- Bruderbaum mit N Blättern hat Höhe $h \leq \log_2 N$



- Blattsuchbaum
 - Wegweiser reichen in binären Knoten
- Suchbaum
 - Schlüssel nur in den binären Knoten
 - wir betrachten nur noch diese Variante
 - *1-2-Bruderbäume*
 - jeder innere Knoten hat mindestens 1, höchstens 2 Nachfolger

Mögliche Implementierung

```
class BrotherTree {  
    struct Node {};  
    struct UnaryNode : public Node {  
        Node *succ = nullptr;  
    };  
    struct BinaryNode : public Node {  
        const int key;  
        Node *left = nullptr;  
        Node *right = nullptr;  
    };  
    Node *root = new UnaryNode();  
}
```

- für Einfügen und Löschen praktisch ist noch ein Zeiger auf den Vorgänger

Einfügen eines neuen Schlüssels x (1/2)

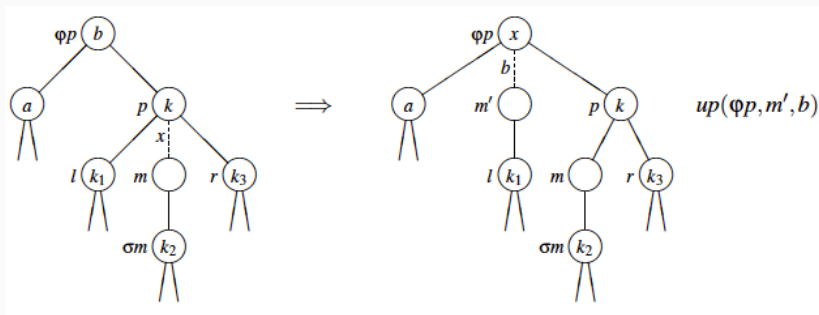
- zunächst wieder Suche
- wenn Suche erfolglos an einem Blatt endet, sei p der Vorgänger dieses Blattes
- Fall 1: p hat nur einen Nachfolger
 - ersetzen des unären Knoten p durch einen binären Knoten mit dem Schlüssel x und zwei Blättern als Nachfolger
 - fertig, da Bruderbaum-Eigenschaft erhalten bleibt

Einfügen eines neuen Schlüssels x (2/2)

- Fall 2: p ist binärer Knoten
 - ohne Einschränkung gilt: $x < p.key$
 - sonst vertausche x und $p.key$
 - x kann nicht mehr im Knoten p untergebracht werden
 - Idee: Um Platz für x zu schaffen, versuche x oder einen anderen Schlüssel beim Bruder oder beim Vorgänger unterzubringen
 - ist das erfolglos, verschiebt man das Einfügeproblem um ein Niveau nach oben bis zur Wurzel
 - wenn das Problem bei der Wurzel nicht gelöst werden kann, wird der Baum durch schaffen einer neuen Wurzel aufgestockt
 - ein Bruderbaum wächst also an der Wurzel!

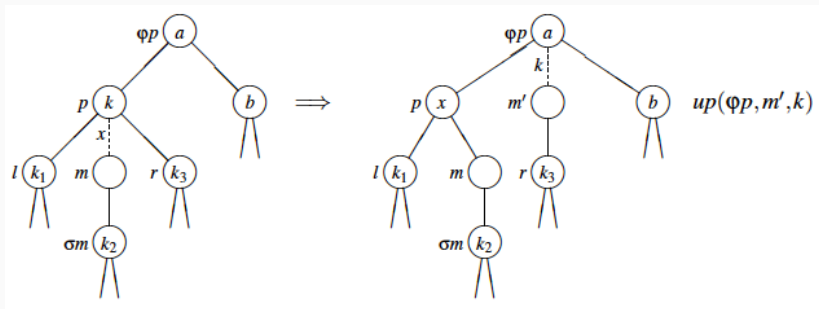
- Prozedur up zum Platz suchen
- es gilt vor jedem Aufruf von $up(p, m, x)$ folgende Invariante:
 1. p hat zwei Nachfolger p_l und p_r , die beide Wurzeln von 1-2-Bruderbäumen sind
 2. m ist entweder Blatt oder unärer Knoten dessen Nachfolger Wurzel eines 1-2-Bruderbaumes ist
 3. Schlüssel in $p_l < x <$ Schlüssel in $m < p.key <$ Schlüssel in p_r .

- Fall 1: p hat linken (binären) Bruder mit zwei Nachfolgern

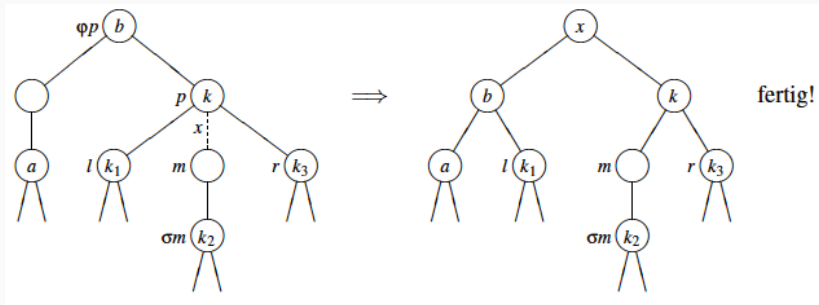


- beim ersten Aufruf von up sind l , m und r Blätter
- d.h. σm , k_1 , k_2 und k_3 existieren nicht
- Analoges gilt für die folgenden Figuren

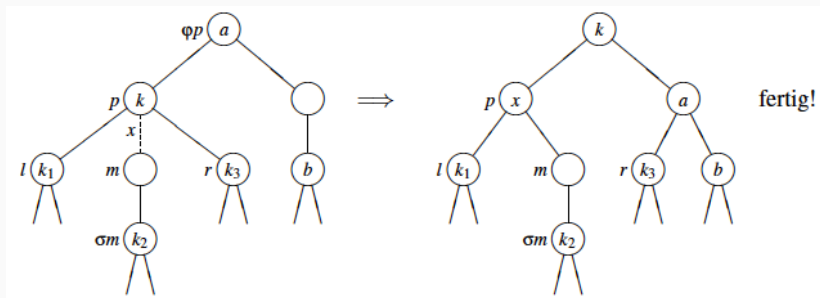
- Fall 2: p hat einen rechten (binären) Bruder mit zwei Nachfolgern



- Fall 3: p hat einen unären linken Bruder

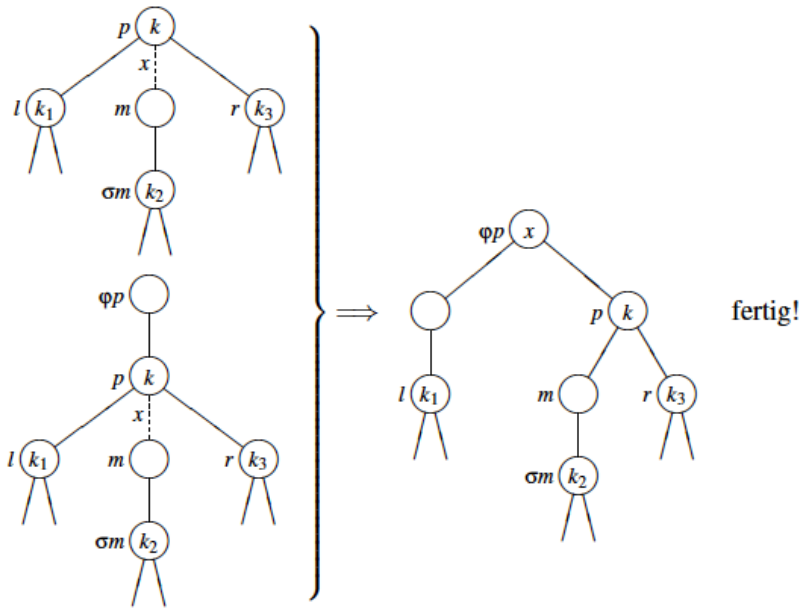


- Fall 4: p hat einen unären rechten Bruder

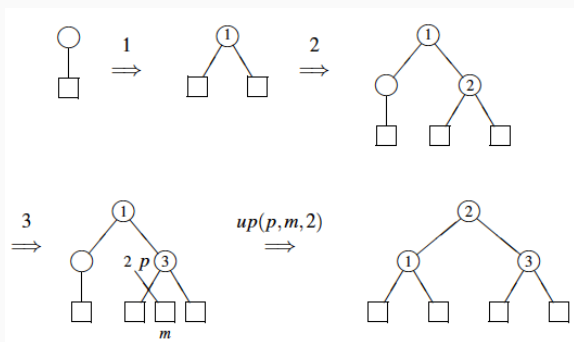


- Fall 5: p hat keinen Bruder (Wurzel oder Nachfolger von unärem Knoten)

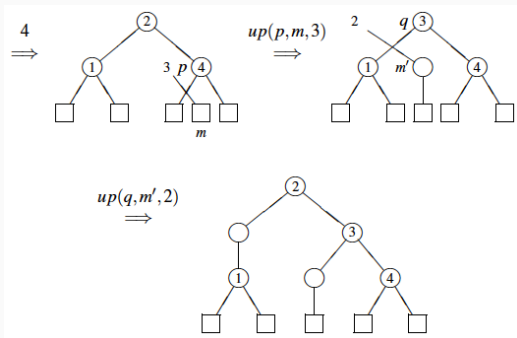
$up(p, m, x)$ (6/6)



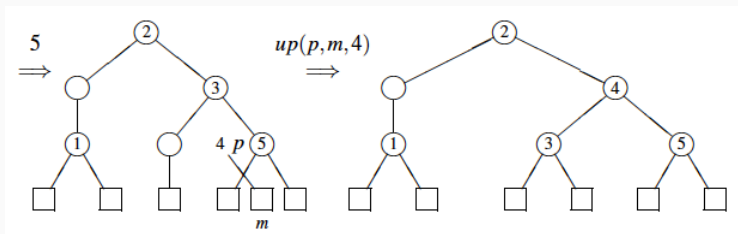
Beispiel: Einfügen 1, 2, 3, 4, 5 in leeren Baum (1/3)



Beispiel: Einfügen 1, 2, 3, 4, 5 in leeren Baum (2/3)



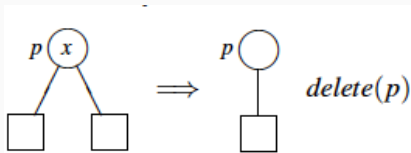
Beispiel: Einfügen 1, 2, 3, 4, 5 in leeren Baum (3/3)



- zunächst wieder Suche nach Schlüssel
- wenn nicht gefunden \Rightarrow fertig
- sonst unter Umständen das Entfernen von p mit $p.key = x$ zurückführen auf Entfernen des symmetrischen Nachfolgers (Vorgängers)
- daraus ergeben sich ohne Einschränkung die folgenden Fälle:

Entfernen eines Schlüssels (2/3)

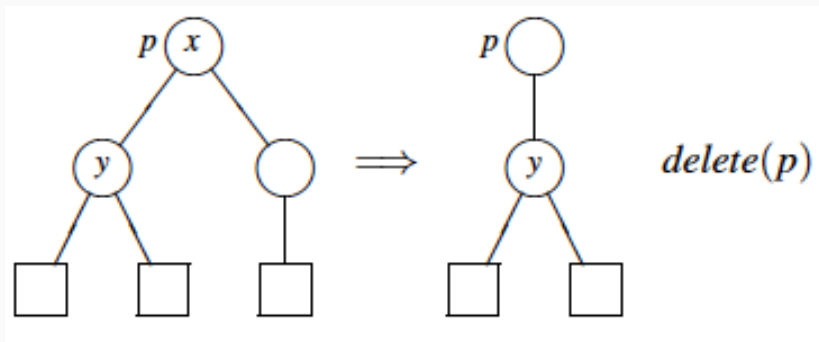
- Fall 1: die Nachfolger von p sind Blätter



- p wird zu unärem Knoten, d.h. Schlüssel x wird entfernt
- anschließend Aufruf von $delete(p)$ um die eventuell verletzte 1-2-Bruderbaum-Eigenschaft wieder herzustellen

Entfernen eines Schlüssels (3/3)

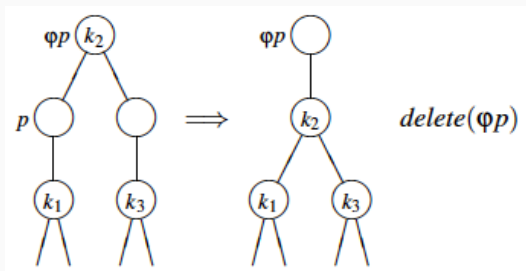
- Fall 2: p hat einen unären Nachfolger



- Fall mit 2 binären Nachfolgern nicht möglich, da sonst symmetrische Nachfolger (Vorgänger) entfernt wird

$delete(p)$ (1/4)

- Fall 1: p hat binären Bruder \Rightarrow fertig
- Fall 2: p hat unären Bruder

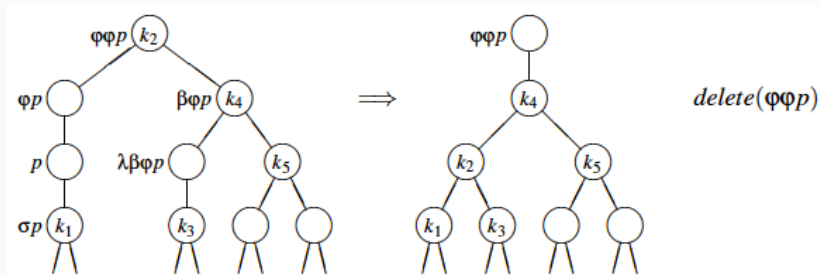


- p ist rechter Nachfolger: analog

- Fall 3: p hat keinen Bruder
- Fall 3.1: p ist Wurzel
 - entferne p und mache den einzigen Nachfolger von p zur neuen Wurzel
- Fall 3.2: p ist einziger Nachfolger seines unären Vorgängers φp
 - nach Invariante muss φp einen binären Bruder $\beta \varphi p$ haben
 - Fallunterscheidung je nachdem $\beta \varphi p$ drei oder vier Enkel hat

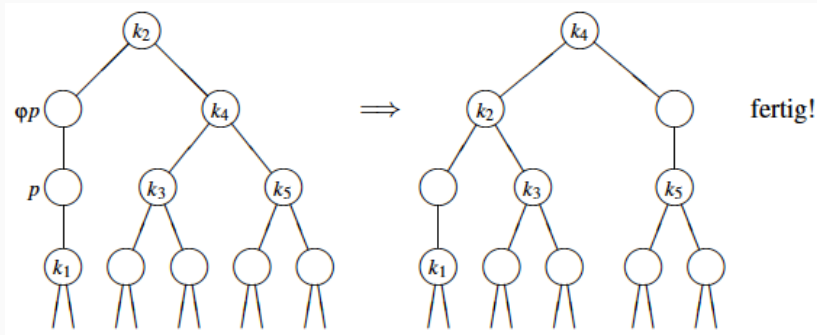
$delete(p)$ (3/4)

- Fall 3.2.1: der linke Nachfolger von $\beta\varphi p$ hat nur einen Nachfolger
 - Annahme φp ist linker Nachfolger von $\varphi\varphi p$
 - andere Fälle symmetrisch



$delete(p)$ (4/4)

- Fall 3.2.2: beide Nachfolger von $\beta\varphi p$ haben zwei Nachfolger
 - Annahme φp ist linker Nachfolger von $\varphi\varphi p$
 - anderer Fall symmetrisch



Die Graphen in diesem Kapitel sind aus dem Buch *Algorithmen und Datenstrukturen* von Ottmann & Widmayer.