

Algorithmen und Datenstrukturen I

Gewichtsbalancierte Bäume

Prof. Dr. Oliver Braun

Fakultät für Informatik und Mathematik

Hochschule München

Letzte Änderung: 01.12.2019 19:06

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------------------|---|
| Idee | 1 |
| Definition | 1 |
| Beispiel | 2 |
| Parameter α | 2 |
| Suchen | 3 |
| Einfügen und Entfernen | 3 |
| Literaturhinweis | 3 |

Idee

- nicht Höhe sondern Anzahl der Knoten bzw. Blätter entscheidend
- d.h. Anzahl der Knoten bzw. Blätter im linken und rechten Teilbaum eines jeden Knotens dürfen nicht zu unterschiedlich sein
- wir wissen bereits: Anzahl Blätter = Anzahl binäre innere Knoten + 1 in einem Binärbaum

Definition

- für Knoten p der Wurzel des Teilbaumes T_p ist, bezeichnet $W(p)$ bzw. $W(T_p)$ die Anzahl der Blätter des Teilbaumes T_p
- $W(p)$ und $W(T_p)$ nennt man **Gewicht** von p bzw. T_p

- ist T ein Baum mit $W(T)$ Blättern, dessen linker Teilbaum $W(T_l)$ Blätter hat, so heisst

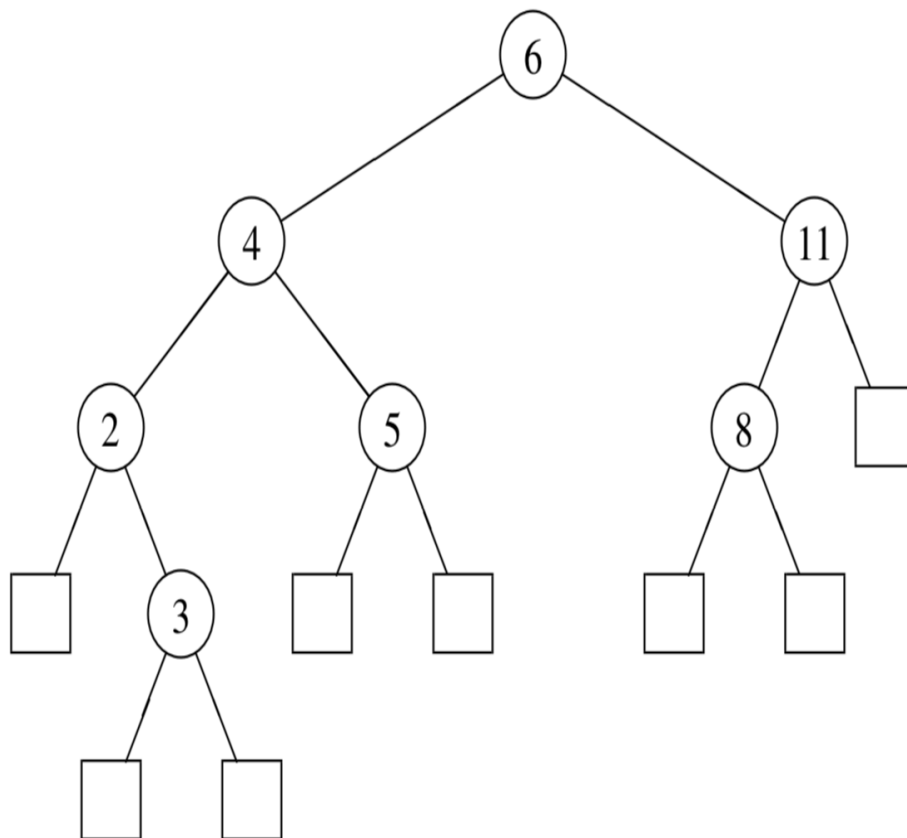
$$\rho(T) = \frac{W(T_l)}{W(T)}$$

Wurzelbalance von T

- ist ferner α eine Zahl mit $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$
- so heisst ein binärer Suchbaum **von beschränkter Balance α** oder **gewichtsbalanciert mit Balance α** , wenn für jeden Teilbaum T' von T gilt:

$$\alpha \leq \rho(T') \leq (1 - \alpha)$$

Beispiel



- z.B. für $\alpha = \frac{1}{4}$ gewichtsbalanciert

Parameter α

- über α lässt sich die Güte der Ausgeglichenheit steuern

- je näher α bei 0 liegt, umso weniger restriktiv
- je näher an $\frac{1}{2}$, umso besser ausgeglichen müssen die $BB[\alpha]$ -Bäume sein
- zu nah an $\frac{1}{2}$ ist aber nicht möglich
 - beispielsweise existiert kein Baum mit zwei inneren Knoten, der $BB[\frac{1}{2}]$ -Baum ist
- sinnvoll daher $\alpha \in [\frac{1}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}]$

Suchen

- man kann zeigen, dass gewichtsbalancierte Bäume eine Höhe haben, die logarithmisch von der Anzahl der Knoten abhängt (siehe Ottman & Widmayer, S. 312ff)
- damit und der Tatsache, dass ein gewichtsbalancierter Baum ein Suchbaum ist, ergibt sich unmittelbar, dass sich die Suche in stets $\mathcal{O}(\log N)$ Schritten ausführen lässt

Einfügen und Entfernen

- beides zunächst wie in Suchbaum
- resultierender Baum ist evtl. nicht mehr gewichtsbalanciert aus $BB[\alpha]$
- anschließend überprüfen ob Wurzelbalance noch in den Grenzen ist
- wenn nicht: Rotation oder Doppelrotation

Literaturhinweis

Die Graphen in diesem Kapitel sind aus dem Buch *Algorithmen und Datenstrukturen* von Ottmann & Widmayer.